

## Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2014 am 19.02.2014

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Eingangsstufe werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab

1. Februar 2014 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW-E.

- Zeigen Sie, dass die Punkte  $A(-3|2)$ ,  $B(4|0)$  und  $C(-1|9)$  die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks sind.
  - Berechnen Sie die Fläche  $F$  und den Umkreisradius  $R$  dieses Dreiecks.
  - Drehen Sie das Dreieck  $ABC$  um  $90^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn um  $(0|0)$  nach  $A'B'C'$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ .

- Wählen Sie zwei gerade aufeinanderfolgende Zahlen, zum Beispiel 4 und 6.

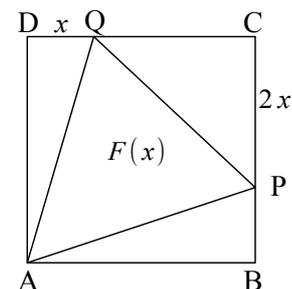
Addieren Sie die Kehrwerte:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ .

5 und 12 sind die Katheten eines Pythagoräischen Dreiecks, d.h. eines rechtwinkligen Dreiecks mit ganzzahligen Seitenlängen, denn es gilt  $5^2 + 12^2 = 13^2$ .

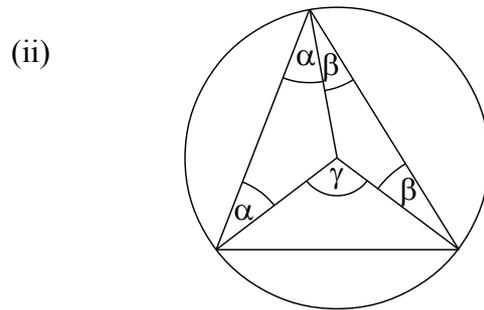
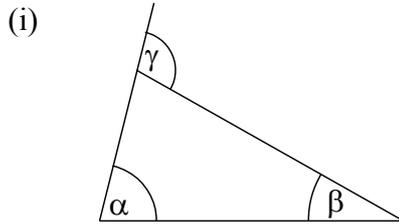
- Gilt dies auch für andere gerade, aufeinanderfolgende Zahlen? Überprüfen Sie diese Behauptung an drei weiteren Beispielen.
- Beweisen Sie diese Behauptung.

- Im Einheitsquadrat  $ABCD$  werden  $P$  auf  $BC$  und  $Q$  auf  $CD$  so gewählt, dass  $PC = 2 \cdot QD$  ist.

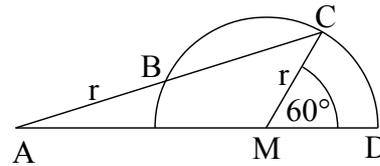
Wie muss  $x := QD$  gewählt werden, damit die Fläche  $F(x)$  des Dreiecks  $APQ$  minimal ist?



4. a) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  in den Abbildungen (i) und (ii)?

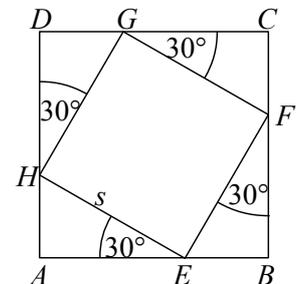


- b) In der Abbildung ist  $AD$  eine Strecke durch den Mittelpunkt  $M$  eines Kreises mit Radius  $r$ . Bei der Strecke  $AC$  durch  $B$  ist  $AB = r$ . Sei  $\sphericalangle DMC = 60^\circ$ .  
Wie groß ist  $\sphericalangle MAB$ ?

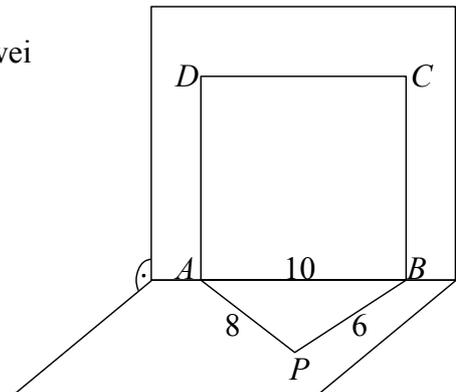


- c) Auf den Seiten des Einheitsquadrates  $ABCD$  werden  $E, F, G$  und  $H$  so gewählt, dass  $\sphericalangle HEA = \sphericalangle EFB = \sphericalangle FGC = \sphericalangle GHD = 30^\circ$ .

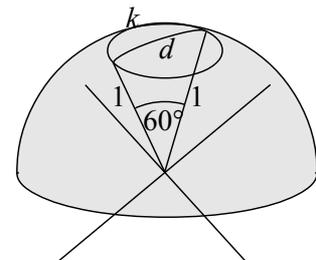
Berechnen Sie die Seitenlänge  $s$  des Quadrates  $EFGH$ .



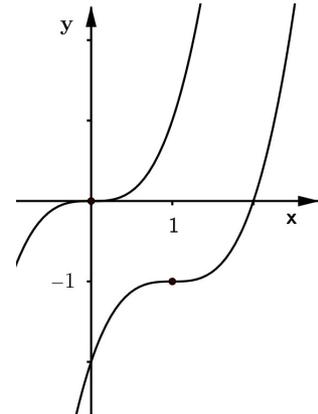
5. a) Das Quadrat  $ABCD$  und das Dreieck  $APB$  liegen in zwei Ebenen, die senkrecht aufeinander stehen. Es sei  $PB = 6$ ,  $PA = 8$  und  $AB = 10$ . Berechnen Sie  $PC$  und den Kosinus von  $\sphericalangle BPA$ .



- b) Bei einem Kreis  $k$  auf einer Kugel (Radius 1) werde der Durchmesser  $d$  von  $k$  auf der Kugeloberfläche gemessen statt in der Ebene, in der  $k$  liegt. Berechnen Sie den Umfang  $u$  von  $k$  und den Durchmesser  $d$ .  
Wie groß ist  $\frac{u}{d}$ ?

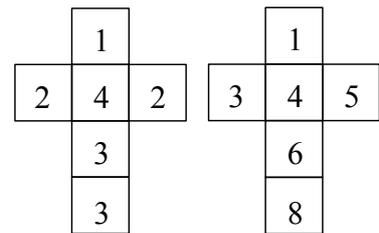


6. a) Es sei  $f(x+1) = x^4 - x^3 - x + 1$ .  
Berechnen Sie  $f(-1)$ .
- b) Der Wendepunkt  $(0|0)$  der Kurve  $y = x^3$  wird im Koordinatensystem nach  $(1|-1)$  verschoben.  
Welche Gleichung hat die verschobene Kurve?
- c) In einem Dreieck mit den Winkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  gilt  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$  und  $\sin \beta = 1$ .  
Berechnen Sie  $\cos \gamma$ .

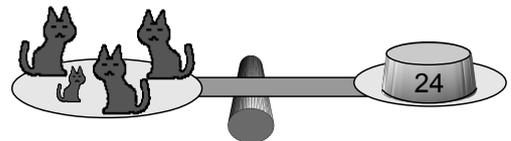


7. a) Bei wie vielen dreistelligen Zahlen sind alle drei Ziffern gerade?
- b) Die beiden dreistelligen Zahlen 147 und 420 haben die Eigenschaft, dass die mittlere Ziffer das arithmetische Mittel der ersten und der letzten Ziffer ist.  
Wie viele dreistellige Zahlen  $abc$  mit  $b = \frac{a+c}{2}$  gibt es?

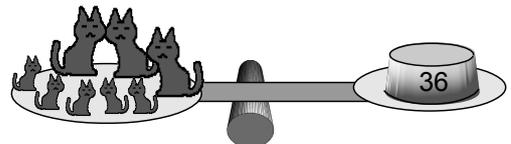
- c) Zwei Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 2, 3, 3 und 4 bzw. 1, 3, 4, 5, 6 und 8 werden gleichzeitig geworfen.  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen 7 ist?



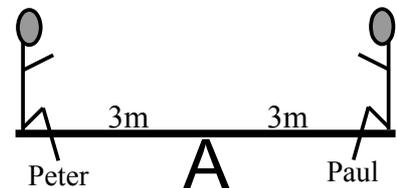
8. a) Drei Katzen und ein Kätzchen wiegen 24 Pfund.



Drei Katzen und fünf Kätzchen wiegen 36 Pfund  
Wie viel wiegt eine Katze?  
Welches Gewicht hat ein Kätzchen?



- b) Auf einer Wippe eines Spielplatzes sitzen Peter und Paul;  
beide haben das gleiche Gewicht.



Paula, die nur halb so schwer ist, möchte mitwippen.

Wie weit ( $s$ ) müssen Paul und Paula vom Angelpunkt A sitzen, damit die Wippe wieder im Gleichgewicht ist?

